Concours d'entrée à l'école des ingénieurs de la ville de Paris 1988

Epreuve pratique de mathématiques (durée 2 h - coef.2)

Le but du problème est l'étude de la fonction I définie sur R_+ par:

$I(x)=\int_0^x f(t)dt$ où f est la fonction: $R_+^* \ni t \longmapsto (\log t)\cdot \mathrm{Arch}_2(1+t)$.

$\log t$ représente le logarithme népérien de la variable t.
e représente la valeur de la fonction exponentielle en 1.
On appelle (Γ) le graphe de I.

1) a)Vérifier la convergence de $\int_0^x f(t)dt$ pour x positif. Montrer que I est continue sur R_+ et dérivable sur R_+^*. Quelle est la valeur de I'(x) pour x strictement positif?

b)Etudier la limite de I(x) quand x tend vers $+\infty$.

c)Etudier les variations de I. Quelle est l'allure de (Γ) en O?

d)Montrer l'existence d'un nombre réel α strictement supérieur à 1 tel que $I(\alpha)=0$.

2) a)Calculer I"(x).

b)On pose $\varphi(x)=x(2+2x+x^2)I''(x)$. Quel est le signe de $\varphi(x)$ pour $x\geq 1$?

c)Quel est le minimum de la fonction $x \longmapsto x\log x$ pour $x \in [0,1]$.
En déduire le signe de $\varphi(x)$ pour $x\in[0,1]$.

d)Qu'en déduire pour (Γ).

3) On se propose dans cette question de trouver un premier encadrement de α.

a)Vérifier que $\forall x\in[0,1]$ $\quad x(\log x-1)\cdot \mathrm{Arch}_2 2 \leq I(x) \leq x(\log x-1)\cdot\frac{\pi}{4}$.

En déduire un encadrement de I(1).

b)Vérifier de même que : $\forall x\ [1,+\infty[$ $\quad x(\log x-1)\cdot \mathrm{Arch}_2 2 \leq I(x) \leq \left[x(\log x-1)+\frac{1}{2}\right]\cdot\frac{\pi}{2}$

c)Etudier les zéros de l'équation $x(\log x-1)+\frac{1}{2}=0$. On appelle β le zéro supérieur à 1.

En déduire que α est compris entre β et e.

d)Donner une valeur approchée de β en utilisant la méthode de Newton (ou de la tangente) en $x_0=2,2$ à la fonction Ψ définie par: $\Psi(x)=x(\log x-1)+\frac{1}{2}$.

4) a)Donner le développement limité en 1/t à l'ordre 2 de la fonction $t\longmapsto \mathrm{Arctg}(1+t)$ au voisinage de $+\infty$.

b)Montrer qu'il existe 4 constantes reelles a,b,c,L telles que:

$$I(x)-ax\log x-bx-c(\log x)^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} L.$$

Expliciter les valeurs a,b,c.

c)En déduire la nature de la branche infinie de (Γ).

5)

a)Etudier la convergence et calculer la valeur des intégrales $(I_p)_{p\in N}$ où $I_p=\int_0^1 t^p \log t\,dt$.

b)Développer en série entière à l'origine la fonction:

$t\longmapsto \mathrm{Arch}_2(1+t)$. Quel est son rayon de convergence R?

c)On pose $\forall t\in]-R,R[$ $\quad \mathrm{Arctg}(1+t)=\sum_0^\infty a_p t^p$.

Vérifier que $\forall t\in[0,1]$ $\left|\sum_{n+1}^\infty a_p t^p\right| \leq \frac{1}{(n+1)(\sqrt{2})^n(\sqrt{2}-1)}$

d)Démontrer la formule: $I(1)=-\frac{\pi}{4}+\sum_1^\infty \frac{(-1)^p \sin\left(p\frac{\pi}{4}\right)}{(\sqrt{2})^p\cdot p(p+1)^2}$.

e)Vérifier que I(1) peut se présenter sous la forme d'une série alternée

En déduire le signe et une majoration de la valeur absolue de:

$$\sum_{n+1}^\infty \frac{(-1)^p \sin\left(p\frac{\pi}{4}\right)}{(\sqrt{2})^p\, p(p+1)^2}$$

f)Donner la valeur approchée de I(1), $-\frac{\pi}{4}+\sum_1^n \frac{(-1)^p \sin\left(p\frac{\pi}{4}\right)}{(\sqrt{2})^p\, p(p+1)^2}$,ainsi que le signe et une majoration de la valeur absolue de l'erreur.

6)

a)Calculer la valeur approchée de $\int_1^{2,4} f(t)dt$ obtenue par la méthode suivante

$$\int_1^{2,4} f(t)dt \approx \left[f(1)+f(2,4)+2\sum_{k=6}^{k=14} f\left(\frac{k}{10}\right)+4\sum_{k=5}^{k=14} f\left(\frac{2k+1}{20}\right)\right]\times\frac{1}{30}$$

On admettra que l'erreur est inférieure à 5.10^{-6}.

b)Donner à partir des résultats précédents une valeur approchee à 10^{-4} près de $\int_{2,4}^\alpha f(t)dt$.

c)Déduire de l'inégalité $\int_{2,4}^\alpha f(t)dt \geq (\alpha-2,4)f(2,4)$ une majoration α_1 de α.
(on prendra pour α_1 un nombre à 5 décimales).

d)Trouver de même une minoration α_1 de α en utilisant l'inégalité:

$$\int_{2,4}^\alpha f(t)dt \leq (\alpha-2,4)f(\alpha_1).$$

7) Représenter (Γ).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail